Name: ....

Matr.Nr.: ....

Stud.Kennz.: ....

Klausur "Formale Grundlagen 2" (326.933)
5.10.2002

Bitte Folgendes beachten:

- *Es dürfen keine Unterlagen zur Klausur verwendet werden.*
- *Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.*
- *Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.*
- *Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit Aufgabe 1 und endend mit Aufgabe 5.*

---

(1) Wir betrachten das Problem der ganzzahligen Division: dabei bestimmt man für positive ganze Zahlen m und n zwei neue ganze Zahlen d und r $(d, r, \geq 0)$ so, daß $m = d \cdot n + r$ und $r < n$. Auf diese Weise erhält man zwei Funktionen von $\mathbb{N}^2$ in $\mathbb{N}_0$, nämlich die Funktion $\mathrm{quot}(m, n)$, welche den Quotienten d zum Ergebnis hat, und die Funktion $\mathrm{rest}(m, n)$, welche den Rest r zum Ergebnis hat.
Zeige, daß die Funktionen "quot" und "rest" primitiv rekursiv sind.
<u>Lösung:</u>

$$f(t,x,y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \cdot y > x, \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{p.r. wegen Satz 1.5.2}$$

$$\mathrm{quot}(x,y) = \Big[\sum_{t=0}^{x} f(t,x,y)\Big] - 1 \qquad \text{p.r. wegen Satz 1.5.3}$$

$$\mathrm{rest}(x,y) = x \mathbin{\dot{-}} \mathrm{quot}(x,y) \cdot y$$

(2) Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und f eine partielle Funktion von Σ^* nach Σ^*. Sei

$$G_f = \{u0w \mid u, w \in \Sigma^*, f(u) = w\}.$$

G_f ist also eine Sprache über $\Sigma' = \{a, b, 0\}$, der Graph von f.

Zeige:
f ist partiell Turing-berechenbar genau dann, wenn G_f rekursiv aufzählbar ist.
Lösung:

$\Longrightarrow$: sei M eine TM, welche die Funktion f berechnet. Eine TM M', welche G_f akzeptiert, geht wie folgt vor: Der Input x wird geprüft, ob er von der Form $x = u0w$ ist für $u, w \in \Sigma^*$. Falls ja, wird M mit Input u gestartet. Der Output y wird mit w verglichen. Bei Gleichheit wird x akzeptiert.

$\Longleftarrow$: sei M eine TM, welche G_f akzeptiert, also $L(M) = G_f$. Eine TM M', welche f berechnet, geht wie folgt vor: sei $u \in \Sigma^*$ die Eingabe für M'. M' erzeugt systematische $(w_i, j) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$. Für ein erzeugtes (w_i, j) prüft M in höchstens j Berechnungsschritten, ob $u0w_i \in G_f$. Wenn ja, so gibt M' als Output $f(u) = w_i$. Wenn nein, so wird das nächste Tupel in $\Sigma^* \times \mathbb{N}$ erzeugt.

(3) Sei M die Turingmaschine mit Zustandsmenge $\{q_0, \ldots, q_7\}$, Eingabealphabet $\{0, 1\}$, Bandalphabet $\{0, 1, \sqcup\}$, Anfangszustand q_0, Endzustand q_7, und Überführungsfunktion δ:

	0	1	$\sqcup$
q_0	$(q_1, \sqcup, R)$	$(q_6, 1, R)$	—
q_1	$(q_1, 0, R)$	$(q_2, 1, R)$	—
q_2	$(q_2, 0, R)$	—	$(q_3, \sqcup, L)$
q_3	$(q_4, \sqcup, L)$	—	—
q_4	$(q_5, \sqcup, L)$	—	—
q_5	$(q_5, 0, L)$	$(q_5, 1, L)$	$(q_0, \sqcup, R)$
q_6	—	—	$(q_7, \sqcup, R)$
q_7	—	—	—

Welche Sprache L ($\subseteq \{0, 1\}^*$) wird von M akzeptiert?
Lösung: $L = \{0^n 1 0^{2n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

(4) Sind folgende Sprachen rekursiv aufzählbar oder sogar rekursiv? Begründe die Antwort.
(a) $L_1 = \{0^n 1 0^m 1 0^{n \cdot m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
(b) $L_2 = \{\langle M \rangle \mid 010 \in L(M)\}$
Lösung:
(a) Ist rekursiv: Produkt $m \cdot n$ berechnen, mit drittem Parameter vergleichen.
(b) r.a., aber nicht rekursiv (Satz von Rice).

(5) Sei $\langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle, \langle M_3 \rangle, \ldots$ eine Aufzählung aller Kodes von Turingmaschinen mit Bandalphabet $\{0, 1, \sqcup\}$, und sei $w_1, w_2, w_3, \ldots$ eine Aufzählung aller Wörter über dem Alphabet $\{0, 1\}$. Sei $L \subset \{0, 1\}^*$ die Sprache

$$L := \{w_{2j} \mid j \in \mathbb{N} \text{ und } w_{2j} \notin L(M_j)\} \quad \cup \quad \{w_{2j-1} \mid j \in \mathbb{N} \text{ und } w_{2j-1} \in L(M_j)\}.$$

Zeige, daß weder L noch $\overline{L}$ (Komplement von L) rekursiv aufzählbar sind.

<u>Lösung:</u>

L nicht r.a.: Annahme $L(M_j) = L$. Dann gilt

$$w_{2j} \in L \Longleftrightarrow w_{2j} \notin L(M_j) = L,$$

ein Widerspruch.

$\overline{L}$ nicht r.a.: Annahme $L(M_j) = \overline{L}$. Dann gilt

$$w_{2j-1} \in \overline{L} \Longleftrightarrow w_{2j-1} \notin L(M_j) = \overline{L},$$

ein Widerspruch.