`Name: ....................................`

`Matr.Nr.: ................................`

`Stud.Kennz.: .............................`

Klausur "Formale Grundlagen 2" (326.933)
1.2.2002

Bitte Folgendes beachten:

- *Es dürfen keine Unterlagen zur Klausur verwendet werden.*
- *Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.*
- *Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.*
- *Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit Aufgabe 1 und endend mit Aufgabe 5.*

---

(1) Sind folgende Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ regulär, rekursiv, oder rekursiv aufzählbar? Begründen Sie die Antwort. Dabei bezeichne $|w|$ die Länge eines Wortes w.

(a) $L_a = \{w \mid |w| \leq 999 \text{ oder } 3 \text{ teilt } |w| \}$.

(b) $L_b = \{w \mid w \text{ enthaelt mehr } 0'\text{en als } 1'\text{en} \}$.

(c) $L_c = \overline{L_d}$ (das Komplement der Diagonalsprache).
Zur Erinnerung: für eine Aufzählung $w_1, w_2, \ldots$ der Wörter über Σ und eine Aufzählung $M_1, M_2, \ldots$ der Turing-Maschinen ist $a_{ij} = 0$ wenn $w_i \in L(M_j)$, und $a_{ij} = 1$ sonst. $L_d = \{ w_j \mid a_{jj} = 1 \}$.

<u>Lösung:</u> L_a ist regulär; L_b ist nicht regulär (Pumping Lemma) aber rekursiv; L_c nicht rekursiv, aber rekursiv aufzählbar

(2) Geben Sie eine Sprache $L \subseteq \{0, 1\}^*$ an, sodass weder L noch $\overline{L}$ rekursiv aufzählbar sind. Begründen Sie die Antwort.

<u>Lösung:</u> ähnlich wie die Diagonalsprache, aber zwei verschiedene "Gerade" durch die Diagonalmatrix;

$$L = \{ w_{2j} \mid a_{2j,j} = 1 \} \cup \{ w_{2j+1} \mid a_{2j+1,j} = 0 \}$$

(3) Wie könnte eine Turing-Maschine M arbeiten, die die universelle Sprache

$$L_u = \{ \langle M \rangle w \mid M \text{ akzeptiert } w \}$$

generiert; also $L_u = G(M)$.
Sie müssen keine Überführungstabelle für M angeben, sondern sie sollten umgangssprachlich die Idee für M beschreiben.

Lösung: M generiert systematisch Tripel $(i, j, k) \in \mathbb{N}^3$; zu (i, j, k) simuliert M k Berechnungsschritte der Maschine M_j auf w_i; wird dabei akzeptiert, so schreibt M das Wort w_i auf das Ausgabeband; weiter mit der Generierung des nächsten Tripels.

(4) Sei M die folgende Turing-Maschine mit Zustandsmenge $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, Bandalphabet $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$, Anfangszustand q_0, Endzustandsmenge $F = \{q_3\}$ und Überführungsfunktion

δ	0	1	$\sqcup$
q_0	$(q_1, 1, R)$	$(q_0, 1, R)$	$(q_2, \sqcup, S)$
q_1	$(q_2, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_3, 1, S)$
q_2	—	—	—
q_3	—	—	—

(a) Ist $110 \in L(M)$?
(b) Was ist die von M akzeptierte Sprache $L(M)$?
(c) Wenn man M auffasst als Turing-Maschine zur Berechnung einer Funktion $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, wobei eine Eingabe (m, n) auf dem Band kodiert wird als $1^m 0 1^n$, welche Funktion f berechnet M ?

Lösung: (a) ja
(b) $L(M) = \{1^m 0 1^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
(c) $f(m, n) = m + n + 2$

(5) L und L' seien Sprachen über $\{0, 1\}$. Begründen Sie Ihre Antworten zu folgenden Fragen:
(a) Sei $L \in \mathcal{NP}$. Ist L rekursiv?
(b) Sei $L \in \mathcal{P}$. Ist $L \in PSPACE$?
(c) Sei $L \in \mathcal{P}$ und L' Polynom-Zeit reduzierbar auf L. Ist dann $L' \in \mathcal{P}$?

Lösung: (a) ja, denn L ist nicht-deterministisch entscheidbar, also auch deterministisch entscheidbar
(b) ja, in polynomialer Zeit kann nur polynomialer Raum gebraucht werden
(c) ja, Satz 5.1.1(a)