Matrikel								SKZ				Name	

Klausur 3

Formale Grundlagen 2

17. Januar 2003

Zu jedem Buchstaben muß entweder ja oder nein angekreuzt werden.

Aufgabe 1 *Seien* $f_1(n) = n^2$, $f_2(n) = n + 1000$, $f_3(n) = 2n^2$, $f_4(n) = e^n$ *mit* $e = 2,71228\ldots$
Fragen:

A		nein	*Ist* f_1 *von der Ordnung* f_2*?*
B	ja		*Ist* f_2 *von der Ordnung* f_1*?*
C	ja		*Sind* f_3 *und* f_1 *von gleicher Ordnung?*
D		nein	*Ist* f_4 *von der Ordnung* f_1*?*
E		nein	*Sind* $f_4(f_1(n))$ *und* $f_4(f_3(n)$ *von gleicher Ordnung?*

Offenbar gibt es keine Konstante C, *so daß* $e^{2n^2} = e^{n^2} \cdot e^{n^2} \le Ce^{n^2}$ *für ein gewisses* N *und alle* $n > N$ *gilt. Es gilt zwar, daß* $f_4 \circ f_1$ *von der Ordnung* $f_4 \circ f_3$ *ist, aber nicht umgekehrt.*

Aufgabe 2 *Betrachten Sie die folgenden Probleme.*
Problem P_1**:** *Enthält die akzeptierte Wortmenge* $L(M)$ *einer Turingmaschine* M *ein Palindrom?*
Problem P_2**:** *Generiert eine Turingmaschine das Wort* 0 *in höchstens 10000 Schritten?*
Problem P_3**:** *Ist die akzeptierte Sprache* $L(M)$ *einer Turingmaschine* M *endlich?*
Problem P_4**:** *Ist das Gleichungssystem* $ax = b$ *mit* $a, b \in \mathbb{N}$ *lösbar in* $\mathbb{N}$*?*
Problem P_5**:** *Gilt* $L(M_1) = L(M_2)$ *für Turingmaschinen* M_1, M_2*?*
Fragen:

A		nein	*Ist* P_1 *entscheidbar?*

Satz von Rice (S. 67, Satz 4.2.1)

B	ja		*Ist* P_2 *entscheidbar?*

Turingmaschine M *10000 Schritte laufen lassen und nachschauen, ob* 0 *generiert wurde.*

C		nein	*Ist* P_3 *entscheidbar?*

$\{S \subseteq \Sigma^\star : S$ *r.a.* $\wedge$ S *endlich*$\}$ *ist nichttriviale Eigenschaft von r.a. Sprachen, somit unentscheidbar. Das bedeutet,* $\{M \in \mathbf{TM} : L(M) \text{ endlich}\}$ *ist nicht rekursiv. Das ist genau die Instanzenmenge von Problem* P_3.

D	ja		*Ist* P_4 *entscheidbar?*

$\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a$ *teilt* $b\}$ *ist rekursiv.*

E		nein	*Ist* P_5 *entscheidbar?*

Satz von Rice

Aufgabe 3 *Gegeben sei eine Turingmaschine* M *mit folgender Eigenschaft: Wenn* M *ein Wort akzeptiert, dann tut sie das in weniger als 1000 Schritten.*

Fragen:

A	ja	

Ist $L(M)$ rekursiv?

Sei M so eine TM. Sei w irgendein Wort. Wenn, nach Eingabe von w, die Maschine in weniger als 1000 Schritten stoppt, dann hat sie entweder einen Finalzustand erreicht - $w \in L(M)$ - oder nicht - $w \notin L(M)$. Falls M nach 1000 Schritten nicht gehalten hat, muß $w \notin L(M)$ gelten, da, auf Grund ihrer speziellen Art, sie ja sonst in < 1000 Schritten gestoppt hätte. Die obige Beschreibung ist eine Konstruktionsanweisung für eine TM, welche $L(M)$ erkennt, i.e., $L(M)$ ist rekursiv.
BEMERKUNG: *Das ist keine Eigenschaft der Sprache, es ist eine Eigenschaft von Turingmaschinen. Satz von Rice hier nicht anwendbar*

B	ja	

Ist $L(M)$ rekursiv aufzählbar?

Natürlich, da rekursiv

C		nein

Ist $L(M)$ notwendigerweise endlich?

Nein. Denkbar wäre eine Turingmaschine M, die genau die Worte akzeptiert, welche mit 11 beginnen. Sie checkt das sicher in < 1000 Schritten, aber $L(M)$ ist unendlich.

D	ja	

Ist die Eigenschaft von $L(M)$, das leere Wort zu enthalten, entscheidbar?

Gegebene TM auf dem leeren Wort 1000 Schritte laufen lassen.
BEMERKUNG: *Dieses ist kein Problem rekursiv aufzählbarer Sprachen. Es ist eine konkrete Turingmaschine gegeben, die, auf Grund ihrer speziellen Natur, einen Entscheidungsalgorithmus zuläßt.*

Aufgabe 4 *Sei $\Sigma = \{0,1\}$ und $L_1, L_2 \in \Sigma^*$. Für $i = 1,2$ bezeichnen wir mit $\overline{L_i} := \Sigma^* \setminus L_i$ das Komplement von L_i.*
Fragen:

A		nein

Wenn L_1 und $\overline{L_2}$ rekursiv sind, ist dann $L_1 \cup L_2$ regulär?

Wähle eine nicht-reguläre Sprache L_1 und $L_2 = \emptyset$.

B	ja	

Wenn $\overline{L_1}$ endlich ist, ist dann L_1 regulär?

Offenbar ist jede endliche Sprache regulär, also auch $\overline{L_1}$. Es gibt also einen DEA M mit $L(M) = \overline{L_1}$. Wir können daraus sicher einen DEA M' konstruieren, der ein Wort w genau dann akzeptiert, wenn dies M nicht tut. Dann gilt aber $L(M') = L_1$ und L_1 ist damit regulär.

C		nein

Wenn $\overline{L_1}$ rekursiv aufzählbar ist, ist dann auch L_1 rekursiv aufzählbar?

Betrachte die Diagonalsprache L_d als L_1.

D	ja	

Wenn $\overline{L_1}$ rekursiv ist und L_2 die Menge aller Wörter ist, die mit einer 1 beginnen, ist dann $L_1 \cap L_2$ rekursiv aufzählbar.

L_1 ist rekursiv und damit auch rekursiv aufzählbar. L_2 ist sogar regulär und damit auch rekursiv aufzählbar. Der Durchschnitt zweier rekursiv aufzählbarer Sprachen ist wieder rekursiv aufzählbar.

E		nein

Sei $L_1 \neq \Sigma^*$ regulär und L_2 rekursiv. Ist die Sprache $L_1 \cap L_2$ regulär?

Wähle als L_1 die reguläre Sprache aller Wörter, die mit einer 1 beginnen, d.h. $L_1 = \{1\} \circ \Sigma^*$. Sei L irgendeine nicht-reguläre aber rekursive Sprache über Σ. Setze $L_2 := \{1\} \circ L$. L_2 ist sicher rekursiv, aber nicht regulär. Allerdings gilt $L_2 = L_1 \cap L_2$.

F	ja	

Sei $L_1 \neq \Sigma^*$ regulär und L_2 rekursiv. Ist die Sprache $L_1^* \cup L_2$ rekursiv aufzählbar?

Sei r ein regulärer Ausdruck, so daß $L_1 = L(r)$, dann ist $L(r^*) = L_1^*$ regulär und damit rekursiv aufzählbar. L_2 ist als rekursive Sprache natürlich rekursiv aufzählbar. Die Vereinigung zweier rekursiv aufzählbarer Sprachen ist rekursiv aufzählbar.