Matrikel								SKZ				Name	

Klausur 2

Formale Grundlagen 2

06. Dezember 2002

Zu jedem Buchstaben muß entweder ja oder nein angekreuzt werden.

Aufgabe 1 *Gegeben sei eine Turingmaschine* $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \{q_F\}, \delta)$ *mit Eingabealphabet* $\Sigma = \{0, 1\}$*, Bandalphabet* $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$ *und Endzustand* q_F*. Die Überführungsfunktion* δ *sei „höhersprachlich“ durch folgende 7 Regeln gegeben. Es ist immer die* ***erste*** *mögliche Regel anzuwenden!*

(1) *Im Zustand* q_F *stoppt* M*.*

(2) *Falls* M *ein Leerzeichen* $\sqcup$ *liest und früher bereits eine* 0 *gelesen wurde, so schreibt* M *ein* $\sqcup$*, bewegt den Kopf nach rechts und geht in den Zustand* q_F*.*

(3) *Falls* M *ein Leerzeichen* $\sqcup$ *liest und früher noch keine* 0 *gelesen wurde, so schreibt* M *ein* $\sqcup$*, verbleibt im selben Zustand und bewegt den Kopf nicht.*

(4) *Falls* M *eine* 1 *liest und früher bereits eine Null gelesen wurde, dann schreibt* M *ein* $\sqcup$*, bewegt den Kopf nach rechts und verbleibt im selben Zustand.*

(5) *Falls* M *eine* 1 *liest und früher noch keine Null gelesen wurde, dann schreibt* M *eine* 1*, bewegt den Kopf nach rechts und verbleibt im selben Zustand.*

(6) *Falls* M *eine* 0 *liest und früher noch keine* 0 *gelesen wurde, so „merkt“ sich* M*, daß eine Null gelesen wurde, schreibt eine* 1 *und bewegt den Kopf nach rechts.*

(7) *Falls* M *eine* 0 *liest und früher bereits eine Null gelesen wurde, so schreibt* M *eine* 0*, bewegt den Kopf nicht und verbleibt im selben Zustand.*

Fragen:

A		nein	*Betrachten Sie* M *als eine Turingmaschine, die eine Sprache generiert, wobei* $\sqcup$ *als ausgezeichnetes Bandsymbol (Trennsymbol) betrachtet wird. Ist* $\{1\}$ *die von* M *generierte Sprache?*
B		nein	*Betrachten Sie* M *als eine Turingmaschine, die eine Sprache generiert, wobei* $\sqcup$ *als ausgezeichnetes Bandsymbol (Trennsymbol) betrachtet wird. Ist* $\{1^n \mid n \in \mathbb{N}, n > 1\}$ *die von* M *generierte Sprache?*
C		nein	*Betrachten Sie* M *als eine Turingmaschine, die eine Funktion berechnet. Eine natürliche Zahl* n *werde auf dem Band von* M *kodiert als eine Folge von* n 1*-Symbolen, das Symbol* 0 *diene als Trennsymbol der Eingabeparameter. Berechnet* M *die Funktion* $f(x, y) = x$*?*
D	ja		*Betrachten Sie* M *als eine Turingmaschine, die eine Funktion berechnet. Eine natürliche Zahl* n *werde auf dem Band von* M *kodiert als eine Folge von* n 1*-Symbolen, das Symbol* 0 *diene als Trennsymbol der Eingabeparameter. Berechnet* M *die Funktion Funktion* $f(x, y) = x + 1$*?*
E		nein	*Ist die von* M *akzeptierte Sprache gleich* $\{10\}$*?*
F		nein	*Ist die von* M *akzeptierte Sprache gleich* $\{1^n \mid n \in \mathbb{N}, n > 1\}$*?*
G	ja		*Ist die von* M *akzeptierte Sprache gleich* $\{1^n 0 1^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}$*?*

Aufgabe 2 *Es seien*
$L_1 = \{a^3 \mid a \in \{0,1,2,3\}^*\}$,
$L_2 = \{a \in \{0,1,2\}^* \mid \exists v : a = v110v\}$.
$L_3 = \{1^n 01^m \mid m,n \in \mathbb{N}\}$,
$L_4 = \{1^n \mid n \in \mathbb{N},\ n \textit{ ist nicht Produkt von genau zwei Primzahlen}\}$,
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *eine primitiv rekursive Funktion und* $L_5 = \{1^n 01^{f(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Fragen:

A	ja	

Ist $L_1 \setminus L_2$ *rekursiv?*
L_1 und L_2 sind rekursiv. Eine Mengendifferenz führt nicht aus der Klasse rekursiver Mengen heraus.

B	ja	

Ist $L_1 \cap L_3$ *rekursiv aufzählbar?*
Der Durchschnitt zweier rekursiv aufzählbarer Sprachen ist immer rekursiv aufzählbar. Man hätte auch feststellen können, daß $L_1 \cap L_3 = \emptyset$ und dies eine rekursiv aufzählbare Menge ist.

C		nein

Ist $L_2 \cap L_3$ *regulär?*
$L_2 \cap L_3 = \{111^n 01^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

D	ja	

Ist $L_4 \circ L_5$ *rekursiv aufzählbar?*
$L_4 \circ L_5 =$
$\{1^m 1^n 01^{f(n)} \mid m,n \in \mathbb{N},\ m \textit{ ist nicht Produkt von genau zwei Primzahlen}\}$.
Die Sprachen L_4 und L_5 sind rekursiv. Seien M_4 und M_5 Turingmaschinen, so daß $L_4 = L(M_4)$ und $L_5 = L(M_5)$. Wir können annehmen, daß sowohl M_4 als auch M_5 auf jeder Eingabe stoppt. Eine Turingmaschine M, die genau die Wörter aus $L_4 \circ L_5$ akzeptiert, kann folgendermaßen konstruiert werden. Man geht das Eingabewort durch. Bei jeder 1, die gelesen wird, spaltet man das Eingabewort auf und läßt M_4 auf dem ersten Teil laufen und M_5 auf dem zweiten Teil. Akzeptieren beide Maschinen das entsprechende Wort, akzeptiert M die Eingabe, anderenfalls akzeptiert M die Eingabe nicht.
Eine andere Lösung ergibt sich aus der Tatsache, daß eine Sprache L rekursiv aufzählbar ist genau dann, wenn es eine Turingmaschine gibt, die L generiert. Seien G_4 und G_5 zwei generierende Turingmaschinen für L_4 und L_5. Offenbar läßt sich leicht eine Turingmaschine konstruieren, die $L_4 \circ L_5$ generiert. (Genauere Angaben in der Übungsstunde.)

Aufgabe 3 *Sei* $P(t,x,y) \equiv x < t < y \wedge x|t$ *und* $f(x,y) = \min_t P(t,x,y)$.
Fragen:

A		nein

Ist $f(3,12) = 3$*?*

B	ja	

Ist $f(3,12) = 6$*?*
Offenbar ist 6 die kleinste natürliche Zahl, die echtes Vielfaches von 3 und gleichzeitig kleiner als 12 ist.

C		nein

Ist $f(3,6) = 6$*?*

D		nein

Ist $f(3,12)$ *undefiniert?*

E	ja	

Ist $f(x,2x)$ *undefiniert für alle* $x \in \mathbb{N}$*?*
Es gibt keine natürliche Zahl t, die gleichzeitig ein echtes Vielfaches von x ist und noch dazu kleiner als $2x$.

Aufgabe 4 *Seien L_1 und L_2 rekursiv aufzählbare Sprachen über* $\{0,1\}$.
Fragen:

A	ja	

Ist $L_1 \cup L_2$ *rekursiv aufzählbar?*

B	ja	

Ist $L_1 \cup \overline{L_1}$ *rekursiv?*

C		nein

Ist $L_1 \cap L_2$ *rekursiv?*

D	ja	

Sei auch $\overline{L_1}$ *rekursiv aufzählbar. Ist* L_1 *rekursiv?*