Matrikel								SKZ				Name	

Klausur 2

Formale Grundlagen 2

14. Dezember 2001

Zu jedem Buchstaben muß entweder ja oder nein angekreuzt werden.

Aufgabe 1 *Gegeben sei eine Turingmaschine* $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \{q_F\}, \delta)$ *mit Eingabealphabet* $\Sigma = \{0, 1\}$, *Bandalphabet* $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$ *und Endzustand* q_F. *Die Überführungsfunktion* δ *sei „höhersprachlich“ durch folgende 5 Regeln gegeben. Es ist immer die* **erste** *mögliche Regel anzuwenden!*

(1) *Im Zustand* q_F *stoppt* M.

(2) *Falls* M *ein Leerzeichen* $\sqcup$ *liest und früher bereits eine* 0 *gelesen wurde, so schreibt* M *eine* 1, *bewegt den Kopf nach rechts und geht in den Zustand* q_F.

(3) *Falls* M *eine* 1 *liest, dann schreibt* M *eine* 1, *bewegt den Kopf nach rechts und verbleibt im selben Zustand.*

(4) *Falls* M *eine* 0 *liest und früher noch keine* 0 *gelesen wurde, so „merkt“ sich* M, *daß eine Null gelesen wurde, schreibt eine* 1 *und bewegt den Kopf nach rechts.*

(5) *Falls* M *eine* 0 *liest und früher bereits eine Null gelesen wurde, so schreibt* M *eine* 0, *bewegt den Kopf nicht und verbleibt im selben Zustand.*

Fragen:

A		nein	*Betrachten Sie* M *als eine Turingmaschine, die eine Sprache generiert, wobei* $\sqcup$ *als ausgezeichnetes Bandsymbol (Trennsymbol) betrachtet wird. Ist* $\{1\}$ *die von* M *generierte Sprache?*
B		nein	*Betrachten Sie* M *als eine Turingmaschine, die eine Sprache generiert, wobei* $\sqcup$ *als ausgezeichnetes Bandsymbol (Trennsymbol) betrachtet wird. Ist* $\{1^n \mid n \in \mathbb{N}, n > 1\}$ *die von* M *generierte Sprache?*
C		nein	*Betrachten Sie* M *als eine Turingmaschine, die eine Funktion berechnet. Eine natürliche Zahl* n *werde auf dem Band von* M *kodiert als eine Folge von* n 1*-Symbolen, das Symbol* 0 *diene als Trennsymbol der Eingabeparameter. Berechnet* M *die Funktion* $f(x, y) = x + y + 1$*?*
D	ja		*Betrachten Sie* M *als eine Turingmaschine, die eine Funktion berechnet. Eine natürliche Zahl* n *werde auf dem Band von* M *kodiert als eine Folge von* n 1*-Symbolen, das Symbol* 0 *diene als Trennsymbol der Eingabeparameter. Berechnet* M *die Funktion Funktion* $f(x, y) = x + y + 2$*?*
E		nein	*Ist die von* M *akzeptierte Sprache gleich* $\{1\}$*?*
F		nein	*Ist von* M *akzeptierte Sprache gleich* $\{1^n \mid n \in \mathbb{N}, n > 1\}$*?*
G	ja		*Ist die von* M *akzeptierte Sprache gleich* $\{1^n 0 1^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}$*?*

Aufgabe 2 *Es seien*
$L_1 = \left\{aa^{-1} \mid a \in \{0, 1, 2, 3\}^*\right\}$,
$L_2 = \left\{a \in \{0, 1, 2\}^* \mid \exists u, v, w : a = uv01v^{-1}w \wedge |v| > 7\right\}$.
$L_3 = \{1^n 0 1^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}$,
$L_4 = \{1^n \mid n \in \mathbb{N},\ n \text{ ist keine Primzahl}\}$,
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *eine primitiv rekursive Funktion und* $L_5 = \left\{1^n 0 1^{f(n)} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

Fragen:

A	ja	

Ist $L_1 \setminus L_2$ rekursiv?

L_1 und L_2 sind rekursiv. Eine Mengendifferenz führt nicht aus der Klasse rekursiver Mengen heraus.

B	ja	

Ist $L_1 \cap L_3$ rekursiv aufzählbar?

Der Durchschnitt zweier rekursiv aufzählbarer Sprachen ist immer rekursiv aufzählbar. Man hätte auch feststellen können, daß $L_1 \cap L_3 = \emptyset$ und dies eine rekursiv aufzählbare Menge ist.

C	ja	

Ist $L_2 \cap L_3$ regulär?

$L_3 \cap L_2 = \{1^n 0 1^m \mid m, n \in \mathbb{N}, m > n > 7\}$

D	ja	

Ist $L_4 \circ L_5$ rekursiv aufzählbar?

$L_4 \circ L_5 = \left\{1^m 1^n 0 1^{f(n)} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N},\ m \text{ ist keine Primzahl}\right\}$. Die Sprachen L_4 und L_5 sind rekursiv. Seien M_4 und M_5 Turingmaschinen, so daß $L_4 = L(M_4)$ und $L_5 = L(M_5)$. Wir können annehmen, daß sowohl M_4 als auch M_5 auf jeder Eingabe stoppt. Eine Turingmaschine M, die genau die Wörter aus $L_3 \circ L_5$ akzeptiert, kann folgendermaßen konstruiert werden. Man geht das Eingabewort durch. Bei jeder 1, die gelesen wird, spaltet man das Eingabewort auf und läßt M_4 auf dem ersten Teil laufen und M_5 auf dem zweiten Teil. Akzeptieren beide Maschinen das entsprechende Wort, akzeptiert M die Eingabe, anderenfalls akzeptiert M die Eingabe nicht.
Eine andere Lösung ergibt sich aus der Tatsache, daß eine Sprache L rekursiv aufzählbar ist genau dann, wenn es eine Turingmaschine gibt, die L generiert. Seien G_4 und G_5 zwei generierende Turingmaschinen für L_4 und L_5. Offenbar läßt sich leicht eine Turingmaschine konstruieren, die $L_4 \circ L_5$ generiert. (Genauere Angaben in der Übungsstunde.)

Aufgabe 3 *Sei* $P(t,x,y) \equiv x \neq t \wedge x|t \wedge t|y$ *und* $f(x,y) = \min_t P(t,x,y)$.

Fragen:

A		nein

Ist $f(3,12) = 4$*?*

B	ja	

Ist $f(3,12) = 6$*?*

Offenbar ist 6 die kleinste natürliche Zahl, die echtes Vielfaches von 3 und gleichzeitig ein Teiler von 12 ist.

C		nein

Ist $f(3,12) = 12$*?*

D		nein

Ist $f(3,12)$ *undefiniert?*

E	ja	

Ist $f(x,x)$ *undefiniert für alle* $x \in \mathbb{N}$*?*

Es gibt keine natürliche Zahl t*, die gleichzeitig ein Vielfaches und ein Teiler von* x *ist und noch dazu verschieden von* x *ist.*

Aufgabe 4 *In der Vorlesung wurde die folgende standardisierte Kodierung von Turingmaschinen besprochen:*
Gegeben Turingmaschine M *mit* $\Sigma = \{0,1\}$, $\Gamma = \{0,1,\sqcup\}$, $Q = \{q_1,\ldots,q_n\}$. *Anfangszustand* q_1, *Endzustandsmenge* $F = \{q_2\}$, *Überführungsfunktion* δ. *Wir bezeichnen die Symbole* $0,1,\sqcup$ *in dieser Reihenfolge mit* X_1, X_2, X_3, *die Bewegungsrichtungen* L, R *mit* D_1, D_2 *(die stationäre Option 'S' kommt nicht vor). Eine Operation* $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_m)$ *wird kodiert als* $0^i10^j10^k10^l10^m$. *Die Turingmaschine* M *selbst wird kodiert als*

$$111code_1 11code_2 \ldots 11code_r 111$$

wobei jedes $code_n$ *die obige Form hat.*
Gegeben sei der folgende Code einer Turingmaschine M

$$1110100101001001101000100100010011 1$$

Fragen:

A	ja	

Akzeptiert M *das Wort* 11111*?*

B		nein

Akzeptiert M *das Wort* 0101*?*

C	ja	

Ist $L(M)$ *regulär?*

D	ja	

Sind $L(M)$ *und* $\{1\}^*$ *identisch?*

Die Maschine M *ist gegeben durch*

$$\Sigma = \{0,1\}, \quad \Gamma = \{0,1,\sqcup\}, \quad Q = \{q_1, q_2\}, \quad S = q_1, \quad F = \{q_2\}$$

δ	0	1	$\sqcup$
q_1	–	$q_1 1 R$	$q_2 \sqcup R$
q_2	–	–	–

M *akzeptiert genau alle Folgen von Einsen, d. h.* $L(M) = \{1\}^*$.